《一百零八學年度第一學期微積分會考答案卷》(A 卷)

姓名					老師		
學號					系別		系

總分(第一部份~第三部份)	初閱		複閱	

第一、二、三部份合計總分	

第一部份：單選擇題

1	**D**	**2**	**B**	**3**	**D**	**4**	**A**	**5**	**C**
6	**B**	**7**	**D**	**8**	**D**	**9**	**C**	**10**	**C**

初閱		評分
複閱		

第二部份：複選擇題

11	**BD**	**12**	**ABC**	**13**	**ABCD**	**14**	**ABCD**	**15**	**ACD**

初閱		評分
複閱		

Q1 the answer:

(a) By the implicit differentiation, we have

$$2x(x+2)+x^2=2yy' \text{ or } y'=\frac{x(3x+4)}{2y}, \quad \text{if } y\neq 0. \quad (\textbf{2pts})^{*1}$$

Therefore, $y'=0$ implies $x=-4/3$ or $x=0$. Putting $x=0$ into the equation of C, we have $y=0$. Note that C cannot produce a horizontal tangent of C at $(0,0)$ (see Figure 1). Putting $x=-4/3$ into the equation of C, we obtain $y=\pm\frac{4\sqrt{6}}{9}$. Hence, C has horizontal tangents at

$$\left(-\frac{4}{3},\pm\frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \text{ or } \left(-\frac{4}{3},\pm\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right). \quad (\textbf{3pts})^{*2}$$

Remark 0.1.

(*1) 若學生沒有使用 the implicit differentiation, 而是考慮 $y=\pm x\sqrt{x+2}$ 並得到正確的 y'，即

$$y'=\pm\left(\sqrt{x+2}+\frac{x}{2\sqrt{x+2}}\right),$$

仍可得到第一部分的 2 分。

(*2) 若學生最後答案為 $(-\frac{4}{3},\pm\frac{4\sqrt{6}}{9})$ 與 $(0,0)$，即沒有排除 $(0,0)$，則第二部分的 3 分僅得 2 分。

(b) The area enclosed by the loop is

$$2\int_{-2}^{0}-x\sqrt{x+2}dx \text{ or } \int_{-2}^{0}-x\sqrt{x+2}-x\sqrt{x+2}dx. \qquad (\textbf{2pts})$$

By u-substitution and a careful calculation, the area is

$$-2\int_{0}^{2}(u-2)\sqrt{u}du=-2\left(\frac{2}{5}u^{5/2}-\frac{4}{3}u^{3/2}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{32}{15}\sqrt{2}. \qquad (\textbf{3pts})^{*3}$$

Remark 0.2.

(*3) 在已得到第一部分 2 分的前提下，若最後答案錯誤但有正確的 substitution form

$$-2\int_{0}^{2}(u-2)\sqrt{u}du,$$

則仍可得到第二部分 3 分中的 2 分。

Q2 the answer:

(a) Set $x(t) = e^{-t}\sin t$ and $y(t) = e^{-t}\cos t$. Note that

$$x'(t) = e^{-t}(-\sin t + \cos t), \quad y'(t) = e^{-t}(-\sin t - \cos t). \qquad (\mathbf{2pts})$$

This implies

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{2}e^{-t}dt, \qquad (\mathbf{1pts})$$

and, hence, the length of $\{\gamma(t)|0 \le t < \infty\}$ equals

$$\int ds = \int_0^\infty \sqrt{2}e^{-t}dt = \sqrt{2}. \qquad (\mathbf{1pts})$$

(b) The desired surface area equals

$$\int 2\pi|1-x|ds = 2\sqrt{2}\pi\int_0^\infty (1 - e^{-t}\sin t)e^{-t}dt. \qquad (\mathbf{2pts})$$

Since $e^{-t}\sin t \ge -1$, one has

$$\int_0^\infty (1 - e^{-t}\sin t)e^{-t}dt \le 2\int_0^\infty e^{-t}dt = 2 < \infty. \qquad (\mathbf{2pts})$$

This implies that the surface area is finite.

(c) By the formula of $x'(t)$ and $y'(t)$ (see Part (a)), one has

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{at } \gamma(\pi/2) \text{ and } \gamma(3\pi/2), \\ -1 & \text{at } \gamma(\pi) \text{ and } \gamma(2\pi). \end{cases} \qquad (\mathbf{4pts})$$

As a result, the desired area equals

$$\begin{aligned}\frac{|x(\pi/2) - x(3\pi/2)| \times |y(\pi) - y(2\pi)|}{2} &= \frac{(e^{-\pi/2} + e^{-3\pi/2})(e^{-\pi} + e^{-2\pi})}{2} \\ &= \frac{e^{-3\pi/2}(1+e^{-\pi})^2}{2}. \qquad (\mathbf{3pts})^{\#}\end{aligned}$$

Remark 0.3.

(#) 面積有另外兩種計算方式。首先，這四條切線分別為

$$L_1 : x - y = e^{-\pi/2}; \quad L_2 : x + y = -e^{-\pi};$$
$$L_3 : x - y = -e^{-3\pi/2}; \quad L_4 : x + y = e^{-2\pi}.$$

因為該四邊形為矩形，面積為 L_1 與 L_3 的距離乘以 L_2 與 L_4 的距離，亦即

$$\frac{e^{-\pi/2} + e^{-3\pi/2}}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{-\pi} + e^{-2\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-3\pi/2}(1+e^{-\pi})^2}{2}.$$

另一種算法是找出四邊形中的任意三個頂點（四個頂點座標如下），例如 P, Q, R。

$$P = \left(\frac{e^{-\pi/2} - e^{-\pi}}{2}, \frac{-e^{-\pi/2} - e^{-\pi}}{2}\right); \quad Q = \left(\frac{-e^{-3\pi/2} - e^{-\pi}}{2}, \frac{e^{-3\pi/2} - e^{-\pi}}{2}\right);$$
$$R = \left(\frac{-e^{-3\pi/2} + e^{-2\pi}}{2}, \frac{e^{-3\pi/2} + e^{-2\pi}}{2}\right); \quad S = \left(\frac{e^{-\pi/2} + e^{-2\pi}}{2}, \frac{-e^{-\pi/2} + e^{-2\pi}}{2}\right).$$

則面積為

$$\overline{PQ} \times \overline{QR} = \frac{e^{-\pi/2} + e^{-3\pi/2}}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{-\pi} + e^{-2\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-3\pi/2}(1+e^{-\pi})^2}{2}.$$

無論用何種方法，有完整呈現面積計算方式者得 2 分（不完全者得 1 分），最後有正確計算出面積者得第 3 分。