《一百一十三學年度第一學期微積分會考答案卷》(A 卷)

第一部份：單選擇題

1	**D**	**2**	**C**	**3**	**C**	**4**	**B**	**5**	**C**
6	**A**	**7**	**B**	**8**	**D**	**9**	**A**	**10**	**A**

第二部份：複選擇題

11	**ABC**	**12**	**ABC**	**13**	**AD**	**14**	**CD**	**15**	**AD**

第三部份：填充題

1	**2**	
	A	**B**
$(-1,\infty)$	**No or does not exist**	e

《一百一十三學年度第一學期微積分會考答案卷》(B 卷)

第一部份：單選擇題

1	**C**	**2**	**D**	**3**	**B**	**4**	**C**	**5**	**A**
6	**C**	**7**	**D**	**8**	**B**	**9**	**A**	**10**	**A**

第二部份：複選擇題

11	**ABC**	**12**	**AD**	**13**	**ABC**	**14**	**AD**	**15**	**CD**

第三部份：填充題

1	**2**	
	A	**B**
$(-1,\infty)$	**No or does not exist**	e

一百一十三學年度微積分甲（一）會考計算證明題評分

3. Let f be a function continuous at 0 and assume that the following limit exists:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x^3}-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right).$$

(A) (2 pts) Find the value of $f(0)$.

(B) (2 pts) Find the value of $f'(0)$.

(C) (4 pts) Assume that $f''(0)$ exists. Find the value of $f''(0)$.

Proof. 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{f(x)-3-2x-x^2}{x^3}$, 假設 $\lim_{x\to 0} g(x)=L$.

(A) (理由, 答案, 各一分.)

Sol1: (說明) 因為 $\lim_{x\to 0} g(x)$ 極限存在, 且分母 $\lim_{x\to 0} x^3=0$, 所以分子

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-3-2x-x^2)\overset{1\text{pt}}{=}0,$$

或(計算) $\lim_{x\to 0}(f(x)-3-2x-x^2)=\lim_{x\to 0} x^3 g(x)=0\cdot L\overset{1\text{pt}}{=}0.$

(推導答案)

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-3-2x-x^2)\overset{*}{=}f(0)-3,\implies f(0)\overset{1\text{pt}}{=}3.$$

....

Sol2: (由定義推導)

$$f(0)\overset{*}{=}\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3-2x-x^2}{x^3}x^3+3+2x+x^2)$$
$$=\lim_{x\to 0}(g(x)x^3+3+2x+x^3)\overset{1\text{pt}}{=}L\cdot 0+3+2\cdot 0+0^2\overset{1\text{pt}}{=}3.$$

(∗: 因為 f 在 0 連續, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.)

(B) (導數 (不可使用羅畢達法則), 答案, 各一分.)

Sol1: (分開計算)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-3}{x}-2-x)=\lim_{x\to 0} x^2 g(x)=0\cdot L=0,$$
$$\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-3}{x}-2-x)\overset{(A)}{=}\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-f(0)}{x}-2-x)\overset{1\text{pt}}{=}f'(0)-2,$$
$$\implies f'(0)\overset{1\text{pt}}{=}2.$$

....

Sol2: (由定義推導)

$$f'(0) \overset{1pt}{=} \underline{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}} \overset{(A)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-3-2x-x^2}{x^3}x^2+2+x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}(g(x)x^2+2+x) = L\cdot 0+2+0 \overset{1pt}{=} \underline{2}.$$

(Attention: No points will be given if L'Hôpital's rule is implemented at the beginning. 注意: 一開始使用 L'Hôpital's rule 就零分. [因為雖然 $f(0)=3 \implies \lim_{x\to 0} g(x)$ 是 $\frac{0}{0}$ 未定型, 但 f 未必附近可微分.])

(C) (未定型, 羅畢達法則 (一階導數), 二階導數 (不可使用羅畢達法則), 答案, 各一分.)

Sol1: (分開計算)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3-2x}{x^2}$$

is an indeterminate form of $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (1pt), we may apply L'Hôpital's rule to get

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3-2x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{\underset{1pt}{=}} \underline{\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-2}{2x}} \overset{(B)}{=} \underline{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} \overset{1pt}{=} \frac{f''(0)}{2}}. \tag{0.1}$$

Along with the fact of

$$0 = 0\cdot L = \lim_{x\to 0} xg(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3-2x}{x^2} - 1,$$

this implies $\underline{f''(0)=2}$ (1pt)

. . . .

Sol2: (合併計算)

(A) $f(0)=3 \implies \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3-2x}{x^2}$

is an indeterminate form (未定型) of type $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, 1pt

$$0 = 0\cdot L = \lim_{x\to 0} xg(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-3-2x}{x^2}-1\right)$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \underline{\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-2}{2x}-1\right)} \overset{(B)}{=} \underline{\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}-1\right) \overset{1pt}{=} \frac{f''(0)}{2}-1},$$

$$\implies \underline{f''(0) \overset{1pt}{=} 2}.$$

■

(Attention: The reasoning of the last equation in (0.1) can not be replaced by L'Hôpital's rule.) (注意: L'H 只能用在第一次, 第二次不可以使用. [因為 f' 未必附近可微分])
